

**ANTONII MARI
LORGNA IN
PUBBLICO MILITARI
COLLEGIO
VERONENSI...**

Antonio Mario Lorgna



ANTONII MARIII L O R G N A

I N

PUBLICO MILITARI COLLEGIO VERONENSI
MATHES. PROFESS.

De quibusdam Maximis , & Minimis

DISSERTATIO

STATICO-GEOMETRICA.



V E R O N Æ,
CICIDCCCLXVI.

Apud Hæredem Augustini Carattoni Typographi Episcopalis.
SUPERIORUM PERMISSU.





VIRO PRÆCLARISSIMO
PETRONIO MATTEUCCI
I N

Bononiensi Universitate Publico Matheſeos Profefſori, Inſtituti Scientiarum, & Artium Academico Penſionario, atque in eodem Inſtituto Aſtronomi Socio.

A. M. LORGNA F.



Roposuit mihi non ita pridem D. Torrelli vir eruditissimus hoc haud inelegans solvendum Problema geometricum: *Dato Circulo datisque ubilibet in eodem circuli plano binis punctis, in ejus peripheria punctum definire tale, ut summa quadratorum, quæ sunt ex binis rectis a punctis datis ad id punctum coeuntibus, sit omnium minima.* Problema huic quodammodo affine habet Vir Summus *Hospitalius* in sua *Analyſi Infin. Parv. Sect. III.*; Punctum enim in dati Circuli perimetro definiendum sumſit tale, ut summa rectarum ex binis punctis extra ipsum datis in id punctum convenientium sit omnium minima: Quod quidem ad hyperboles constructionem reduxit. Illud ego cum Geometriæ tantum elementaris ope facile solviſſem, anſam exinde arripui, vadium generaliter tentandi, ut in linea

A 2

qua

quacumque, nedum in Circulo minimum istiusmodi definirem, quotuscumque tandem fuerit punctorum datorum numerus. Neque sane irritò conatu: Plenariam enim solutionem nactus sum perfacili methodo, atque universali, elegantissimi Theorematis statici subsidio, quod mihi sese obtulit, quodque, quantum quidem mihi hactenus innotuit, nullibi memoratum penes Staticorum Scriptores prostat. Ulterius pergendo, occasione ipsa ferente, in eam ipsam incidi, minimi, quod in æquilibrio virium invenitur, considerationem, quam, Præstantissime Vir, peculiari opusculo, eoque peregre in Comment. Inst. Scient. Bonon. T. IV. inseruisti.

Cum vero animadverterem id ibi tantum in libera puncti attracti directione definiri, clareque perspicerem id ipsum reperiri quoque in directione necessaria, haud inconsultum duxi, legem horumce minimorum generalem una eademque opera demonstrare, Theoremate illo ad id veluti manucente. Theoremata etiam aliquot admiscui, quæ si nullam aliam ob causam in pretio esse possunt, simplicitate, & novitate tamen tuentur ipsa se, & hoc saltem nomine a Studiosis hominibus forte haud prorsus negligentur. Sed jam quæ fecerim ipsa res indicabit. Quidquid interim id sit, male equidem de te, Vir Illustrissime, meritis essem, nisi tuum plane esse voluerim; Meditatio enim illa tua nostram qualemcumque, huiusmodi in æquilibriis minimorum contemplationem promovendi, industriam suscitavit. Velim igitur lucubratiunculam hanc, quam tibi inscribo, quæque nulla re magis, quam nomine tuo, nixa, in publicum prodit, tibi accipiendam putes, tuamque prorsus facias, si quid in ea consideratione dignum ratus fueris inesse.

Præsterno itaque huiusmodi.

L E M M A.

I. Si in Triangulo a vertice ad punctum quod basim bifariam dividit recta linea ducatur: Quadrata ex lateribus facta æqualia erunt quadratis, quæ sunt ex basis partibus,

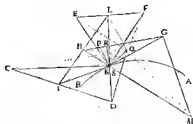
tibus, & duplo quadrato ejus lineæ, quæ a vertice ad
basim ducta fuerit.

Demonstratur ex 12. & 13. Prop. Lib. II. Elem. Eucl.

THEOREMA I.

II. Si fuerit linea qualiscumque, & puncta
quotvis in eodem plano extra, vel intra ip-
sam quomodolibet data veluti centra gravi-
tatis æqualium ponderum inibi constituto-
rum concipiantur, atque a communi eorum-
dem gravitatis centro ad lineam ductam ef-
fe intelligatur rectam minimam, vel maxi-
mam omnium, quæ ab eodem puncto duci
possunt, summa quadratorum, quæ descri-
buntur a rectis ex iisdem punctis ad id li-
neæ punctum convenientibus, erit itidem
omnium minima, vel maxima.

Sit AKB linea data; puncta vero data sint C, D, E,
F, G; Jungantur bina quælibet C, D, & bifecetur in I



recta CD; rursus jungantur bina E, F, bifeceturque in
L recta EF; juncta IL, bifectaue in H, erit punctum
H

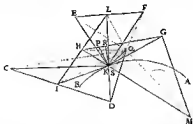
æquatur quadratis ex PK, PG demto duplo Rectangulo GPR. Rurſus igitur ibi erit ſumma quadratorum ex CK, DK &c. omnium minima vel maxima, ubi quadrupla quadrata ex IH, HP, quintuplum quadratum ex PK, octuplum Rectangulum HPR, demto duplo Rectangulo GPR, una cum quadrato ex PG conſcient minimum, vel maximum. Quoniam vero PG quadrupla eſt ipſius HP: octuplum rectangulum HPR æquatur duplo Rectangulo GPR; Ipſæ autem IH, HP, PG ſunt ſemper eadem, ubicumque ſit punctum K. Ibi igitur fit ſumma quadratorum ex CK, DK &c. omnium minima, vel maxima, ubi quintuplum quadratum ex PK fuerit omnium minimum vel maximum, videlicet ubi recta PK a communi gravitatis centro P æque gravium ponderum C, D, E, F, G ad lineam ducta fuerit minima, vel maxima. Si fuerit igitur linea qualiſcumque &c. Q. E. D.

T H E O R E M A II.

III. Cæteris manentibus producat HK, donec occurrat rectæ GM parallelæ ipſi PK in M, tranſeatque punctum G in M; quam proportionem habet HP ad PG eandem habebit HK ad KM, ideoque ſecta erit HM in K in reciproca ponderum in M, H conſtitutorum ratione: Quare punctum P aſſiſtbit in K, eritque K commune gravitatis centrum æque gravium ponderum C, D, E, F, M; Dico, ſummam quadratorum quæ ſiunt ex rectis CK, DK, EK, FK, MK, eſſe omnium minimam:

Ducantur ad aliud quodlibet plani punctum Q rectæ CQ, DQ, IQ, EQ, LQ, FQ, MQ, & a puncto Q demit-

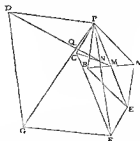
demittatur ad HM normalis QS : Jungantur puncta KQ.
 Quadratum ex HQ æquatur quadratis ex HK, KQ una cum



duplo rectangulo HKS; Rursus quadratum ex QM æquatur quadratis ex QK, KM demto duplo rectangulo MKS; Quadruplum igitur quadratum ex HQ una cum quadrato ex QM æquatur quadrato ex KM, quadruplo quadrato ex HK, quintuplo ex KQ una cum octuplo rectangulo HKS, demto duplo rectangulo MKS. Et quoniam HM secta est ita in K ut sit MK quadrupla ipsius HK: Octuplum rectangulum HKS æquatur duplo rectangulo MKS. Erit igitur quadruplum quadratum ex HQ una cum quadrato ex QM æquale quadruplo quadrato ex HK, quintuplo quadrato ex KQ una cum quadrato ex KM. Majus est igitur quadruplum quadratum ex HQ una cum quadrato ex QM, quam quadruplum quadratum ex HK una cum quadrato ex KM; Addito utrinque quadruplo quadrato ex IH, erunt dupla quadrata ex IQ, QL una cum quadrato ex QM majora duplis quadratis ex IK, KL una cum quadrato ex KM; Additis utrinque duplis quadratis ex IC, LE, summa quadratorum ex CQ, DQ, EQ, FQ una cum quadrato ex QM major erit summa quadratorum ex CK, DK, EK, FK, una cum quadrato ex KM.

Eodem modo demonstrabitur quadrata ad aliud quodvis plani punctum similiter facta majora esse quadratis,
 quæ

Super AP, BP compleatur parallelogrammum APBE, ductaque diagonali PE, super PE, PC compleatur pa-



rallelogrammum PCFE, ductaque diagonali PF, super PF, PD compleatur parallelogrammum PDGF, ducaturque diagonalis PG, quæ erit utique Vis ex omnibus composita. Jungantur puncta A, B, & a puncto M ad C ducta MC diagonalem PF secante in N, jungatur ND secans diagonalem PG in Q, Dico, punctum Q centrum esse gravitatis commune ponderum æqualium A, B, C, D, PG vero quadruplam esse ipsius PQ.

Quoniam enim diagonales PE, AB se mutuo secant bifariam in M, erit M centrum gravitatis commune ponderum A, B; Similia autem sunt Triangula PMN, CNF ob parallelas PM, CF: Quare ut MN ad NC, ita MP ad CF, vel PE ipsi CF æqualem; subdupla est igitur MN ipsius NC, atque ideo secta est MC in N in reciproca ratione ponderum in M, & C constitutum. In N igitur centrum est commune gravitatis punctorum, A, B, C.

Quoniam vero & PN ad NF se habet ut MN ad NC, atque invertendo, componendo, & rursus invertendo PN ad PF ut MN ad MC, erit PN subtripla ipsius PF. Similia sunt autem Triangula PNQ, DQG ob parallelas PN, DG, ideoque ut NQ ad QD ita PN ad DG, vel ipsi æqualem PF. Se habent igitur inter se invicem NQ, DQ

reci-

reciprocè ut numeri ponderum æqualium in N, D constitutorum. Quare erit punctum Q commune gravitatis centrum æque gravium ponderum A, B, C, D. Verum & ipsa PQ ad QG se habet ut NQ ad QD, & ut PQ ad PG ita NQ ad ND. Igitur PG quadrupla est ipsius PQ. Quare si fuerint vires quotlibet in punctum aliquod &c. Q. E. D.

VII. Prastantissimum est hoc Theorema, cujus ope nullo fere negotio vires quocumque in punctum agentes componuntur, atque media omnium tendentia determinatur. *Wolffus* in *Mechan.* §. 256. longo satis circuitu ad id demonstrandum usus est; *Martinus* autem in *Statics Elem.* Cap. iv. ex operoso Theoremate, de quo infra, id ipsum derivavit. Verum ex constructione nostra pronò quidem alveo fluit, atque elegans inde, mihiq; nova elicitur ratio, centrum commune gravitatis ponderum quocumque æqualium in eodem plano positorum inveniendi, quam liceat enunciare.

P R O B L E M A.

VIII. Centrum commune gravitatis ponderum quocumque æqualium in uno eodemque plano constitutorum invenire.

Sunto A, B, C, D pondera æqualia. Sumatur punctum aliquod P ubilibet in eodem plano, junctisque PA, PB, PC, PD, reliqua peragantur, quæ in Lemmatis constructione facta sunt.

Eadem prorsus, qua ibi usi sumus, methodo demonstrabitur, punctum Q commune esse gravitatis centrum æque gravium ponderum A, B, C, D. Igitur &c.

T H E O R E M A III.

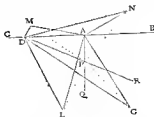
IX. Si fuerint in eodem plano puncta quotvis, veluti totidem centra virium, quæ pun-

B 2

ctum

Etum aliquod, pro distantiarum ratione sollicitent per necessariam, vel liberam directionem, in eo tantum id punctum conquiescet loco, ubi fuerit ad distantiam omnium minimam a communi gravitatis centro totidem æque gravium ponderum io ipsis punctis constitutorum.

Sit punctum A primum in necessaria directione attractum, veluti si cogatur incedere per canale BC, extra quod



egredi non possit, a viribus AM, AN, AL, AG atque in extremitatibus M, N, L, G reclarum, per quas vires illæ, earumque directiones designantur, totidem posita esse intelligatur pondera æqualia, quorum P commune gravitatis centrum. Sit vero a puncto P ducta ad Canale BC recta omnium minima PA, quæ erit utique eidem Canali normalis in A, Dico, punctum mobile in A constitutum conquiescere. Producta enim AP ad partes P, captaque AQ quadrupla ipsius AP, designabit AQ tam directionem, quam quantitatem vis omnibus simul æquipollentis (vi). Perinde igitur est ac si sola adesset vis AQ, punctumque A per directionem AQ sollicitaret. Et quoniam potentia qua premitur latus Cana-

nalis alia esse non potest, quam quæ punctum sollicitat per directionem eidem Canali normalem, erit eadem AQ Canali BC normalis in A, potentia, qua premitur latus canalis, sive qua punctum A tentat recedere a necessaria directione BC. Nulla igitur adest vis, qua punctum in A constitutum sollicitetur per directionem necessariam BC, quaque promoveri possit; ibi enim actio tota potentiae omnibus æquipollentis AQ in premendo Canali exeritur; Id vero alibi quam in A contingere nequit, nam ex alio quovis puncto D canal-¹³is BC directio potentiae ex omnibus coalescentis DR, quæque vi Lemmatis per centrum P transire debet obliqua erit directioni necessariae BC, ideoque resolvable in laterales, quarum una semper punctum D per Canale promoveri poterit. In unico igitur puncto A directionis necessariae BC, ad minimam scilicet a communi gravitatis centro ponderum æqualium M, N, L, G distantiam, punctum attractum immotum consistit.

Cæteris manentibus, sublatum concipiatur Canale BC. Jam libere punctum A ad commune gravitatis centrum P æquegravium ponderum M, N, L, G accedere poterit, media virium directione AP. Ex quoniam nil impedit quominus cum ipso plane congruat, ibi tantum in directione libera, distantia puncti attracti a centro P fiet omnium minima, ubi ipsa penitus evanuerit, scilicet in puncto P. Verum decrescente distantia AP, ipsa quoque ejusdem AP multiplex AQ in eadem proportion-
ne diminuitur: evanescente igitur AP, evanescet pariter ipsa AQ. Quare coincidentibus punctis A, P, nulla est amplius vis, quæ ex potentiarum MP, NP, LP, GP compositione coalescat in P. Æquilibrantur ideo eadem potentiae inter se mutuo in ipso puncto P, punctumque A in P constitutum conquiescit. Igitur si fuerint in eodem plano puncta quotvis &c. Q. E. D.

X. Perspicuum est, me non monente, notissimum illud Incomparabilis *Leibnitii* Theorema in hoc nostro

nostro generali contineri, quo scilicet ibi inter vires quotlibet in punctum agentes æquilibrium fieri, conficitur, ubi punctum illud sit commune gravitatis centrum totidem æqualium ponderum existentium in extremitatibus rectarum easdem vires referentium, quodque in Epistola ad *Wallisium* data exposuit, & a nonnullis postea satis operose demonstratum est.

XI. Hisce veluti Lemmatice præmissis, facillime identitas demonstratur puncti, ubi Vires quotlibet inter se mutuo æquilibrantur, cum puncto, in quo minimum illud invenitur, de quo in Theorem. I., & II. differuimus, neutro ab altero pendente.

THEOREMA IV.

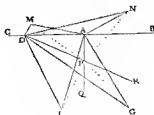
XII. Si vires quotlibet in eodem plano constitutæ punctum aliquod mobile trahant per quamcumque directionem necessariam, vel liberam, ibi summa quadratorum, quæ fiunt a rectis virium illarum trahentium quantitates, & directiones referentibus, est omnium minima, ubi punctum, quod trahitur manet immotum:

Sint enim vires LA, MA, NA, GA, quæ in punctum A per necessariam directionem BC, ex qua egredi non possit, simul agant pro distantiarum ratione, sitque P commune gravitatis centrum totidem æque gravium ponderum in L, M, N, G collocatorum, & recta PA omnium minima, quæ a puncto P ad Canale BC duci possunt.

Jam per ea, quæ in primo Theoremate demonstrata sunt, summa quadratorum, quæ fiunt ex rectis LA, MA, NA, GA est omnium minima; ex præcedenti vero, punctum mobile in A constitutum conquiescere debet. Patet igitur propositum quod ad directionem necessariam.

Patet

Patet etiam in libera; Constituto enim puncto A sic a viribus attracto in ipso gravitatis centro P, sum-



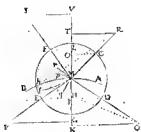
ma quadratorum ex LP, MP, NP, GP fit per Theorema II. omnium minima; ibi autem vi Theorematis præcedentis, id punctum immobile consistit. Ergo si fuerint vires quotlibet &c. Q. E. D.

XIII. Puncta hætenus in eodem plano constituta supposuimus; Verum id ipsum facile demonstrari poterit, si in diversis quoque quomodocumque planis sita concipiantur. Transeo itaque ad alia quædam Theoremata huc pertinentia, quorum consideratio, præcedentium occasione, animum sublit, quæque hoc loco opportunissime cedere videntur.

THEOREMA V.

XIV. Sit curva qualiscumque AMB, per quam incedere concipiatur mobile M a viribus quocumque MP, MQ, MR, MS &c. in eodem plano quomodocumque sitis, pro distantiarum ratione sollicitatum, extra quam vero egredi non possit,

fit, atque in M id punctum attractum immobile consistat: centro M, atque intervallo quovis MC describatur circulus CDEF, & in punctis C, D, E, F pondera collocentur rectis RM, QM, PM, SM singula singulis proportionalia, dico, rectam MK, quæ per commune gravitatis centrum hujusmodi ponderum in C, D, E, F constitutorum transit, normalem esse Curvæ AMB in M.



Producatur KM, atque ad ipsam normales a punctis P, E, S, F, R, C, Q, D ducantur rectæ PG, EH, SV, FL, RT, CO, QK, DI; Sumatur radius MC pro unitate, & quoniam ex similitudine Triangulorum MCO, MRT, ut MC ad CO, ita MR ad RT, normalis RT, æqualis erit facto ex RM in CO; eodem modo demonstrabitur rectas QK, PG, SV æquales esse factis ex QM in DI, ex PM in EH, ex SM in FL. Quoniam vero transit ex hypothesi recta MK per commune gravitatis

cen-

centrum ponderum C, D, E, F, rectis RM, QM, PM, SM, proportionalium, erunt, ex staticis, facta ex PM in EH, & ex SM in FL ex una parte, æqualia factis ex QM in DI, & ex RM in CO ex altera. Igitur & summa normalium PG, SV ex una parte æqualis erit summæ normalium QK, RT ex altera, utpote iisdem factis singulæ singulis æquales. Quare ex statices principis transibit etiam eadem MK per commune gravitatis centrum ponderum æqualium in P, Q, R, S constitutorum, scilicet in ipsis virium centris. Erit igitur ex præcedentibus recta MK media directio virium PM, QM, RM, SM, quæ cum ex hypothefi in M æquilibrentur, erit eadem MK curvæ AMB normalis in M. Si igitur fuerit AMB curva qualiscumque &c. Q. E. D.

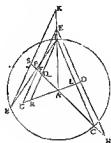
XV. Mire cum iis hæc consentiunt, quæ Marchio *Hospitalius* in *Analysi* infinite parv. §. 11. Probl. x. demonstravit, etiamfi puncta P, Q, R, S &c. foci non sint, & curva AMB sit qualiscumque.

Ex hoc enim, quod demonstravimus, Theoremate, recta MK, curvæ normalis in puncto æquilibrii M, ita est positione constituta, ut facta ex PM in EH, & ex SM in FL ex una parte æquantur factis ex QM in DI, & ex RM in CO ex altera, hoc est PM. EH + SM. FL — QM. DI — RM. CO = 0, ideoque transit ipsa per commune gravitatis centrum ponderum in C, D, E, F collocatorum, atque iis quantitibus proportionalium, per quas normales CO, DI, EH, FL multiplicantur. Itaque super curvam AB, sumatur arcus Mh infinite parvus, ductisque Ph, Qh, Rh, Sh, centris P, Q, R, S atque intervallis PM, QM, RM, SM describantur arculi circulares Mr, Mq, Mp, Ms; & quoniam anguli IMh, QMq recti sunt, demto utrinque communi angulo IMq, anguli DMI, qMh, in Triangulis MDI, qMh erunt æquales, itidemque anguli in I, & q utpote recti. Quare Triangula DMI, qMh erunt similia. Eodem modo demonstrabitur Triangula MEH, Mrh, item Triangula

C

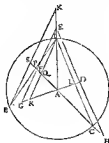
MCO,

distantiarum ratione infimul agentes inter se mutuo æquibrentur in puncto A. Centro A, atque intervallo quolibet AC describatur Circulus CBI, atque in punctis C, B, I, super AH, AG, AE, si opus productas pondera constituentur Viribus trabentibus AH, AG, AE proportionalia, dico, idem punctum A commune esse gravitatis centrum ejusmodi ponderum in C, B, I constitutorum.



Producatur AE, junctisque GE, EH, BI, ipsi GE ducantur parallelæ IR, BK; & quoniam ratione æquilibrii unaquæque Potentia æqualis est, & contraria ei, quæ oritur ex aliarum compositione, recta HA producta bisecabit GE in F, rectasque RI, BK eidem GE parallelas in Q, & S. Triangula igitur BSP, PQI erunt similia, ideoque ut BP ad PI ita BS ad QI, vel QR ipsi QI æqualem. Ita vero BS ad QR ut AB ad AR, vel ut AI ipsi AB æqualis ad AR; Sed ut AI ad AR ita AE ad AG; ita igitur BP ad PI ut AE ad AG, scilicet

cet in reciproca ponderum in B, I constitutorum ratione. Quare erit punctum P commune gravitatis centrum ponderum B, & I, atque ideo in ipsa PC erit commune gravitatis centrum trium ponderum B, C, I.



Rurfus juncta IC, ratione æquilíbrii, GA producta rectam EH bifariam secare debet in D. Eodem igitur modo, sectam esse CI in L in reciproca ponderum in I, C constitutorum ratione, demonstrabitur. Quare in ipsa BL erit quoque commune gravitatis centrum trium ponderum B, C, I. Necessario igitur id gravitatis centrum erit in puncto A, utpote ætrique ipsarum CP, BL commune.

Si vires ideo quocumque &c. Q. E. D.

XVI. Extat igitur & alter Canon generalis pro mutuo dignoscendo Potentiarum quocumque æquilíbrii, qui ab illo *Leibnitiano*, quem §. X. memoravimus non pendet.

Cæterum notatu dignum est, quod si in puncto A fuerint inter se mutuo æquilibratæ vires AH, AG, AE, vel in centris virium H, G, E statuas pondera æqualia, vel in C, B, I super easdem AH, AG, AE, si opus productas, ad æquales ab A distantias, pondera colloces ipsis viribus singula singulis proportionalia, unum idem-

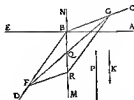
idemque punctum A tam erit commune gravitatis centrum ponderum æqualium H, G, E, quam ponderum viribus trahentibus proportionalium C, B, D.

Præterea quidquid de illo *Leibnitiano* superius dictum est in necessaria mobilium attractorum directione, huic quoque nostro plane competit, utrumque enim perpetuo in una eademque recta consistit, veluti ex Theoremate V. satis apparet.

Interim nonnulla, quæ ulterius pergendo in Dioptrici animadvertere hujusce Meditationunculæ occasione datum fuit, addere, non abs re fore judicamus.

THEOREMA VII.

XVIII. Sunt ABC , ABD bina media diversa inter se consistentia per planum AE directa, sitque CB lucis radius in superficiem AE incidens, BD refractus. Si abscindatur a radio refracto quolibet BF , quæ ita se habeat ad BC super incidentem, ut sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refractionis, dico, summam quadratorum, quæ fiunt

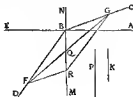


ex GB, BF esse omnium minimam, vel mi-

10-

norem, quam si fieret ex rectis a G, & F ad aliud quodvis punctum plani AE convenientibus.

Sit enim MN axis incidentiæ: ducatur a puncto F radio incidenti BG parallela FR, junctaque GR, ducatur



recta GF. Et quoniam angulus GBR æquatur angulo BRF propter parallelas GB, RF, atque in Triangulo BRF est ut BF ad FR ita sinus anguli BRF ad sinum anguli RBF, erit quoque ita BF ad FR ut sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refractionis, scilicet ut BF ad BG ex constructione. Quare FR æqualis est ipsi BG, & parallela; Binæ igitur GR, BF sunt itidem sibi invicem æquales, & parallelæ, atque GRFB parallelogrammum est, fecantque ideo se mutuo bifariam in Q binæ BR, GF. Quadrata igitur ex GB, BF æquantur quadratis partium QF, QG, & duplo quadrato ex QB. Iisdem vero QF, QG semper manentibus, ibi super planum AE quadrata ex GB, BF minimum conficiunt, ubi minima fuerit QB; Porro Axis incidentiæ MN normalis est in B ipsi AE, ideoque QB omnium minima est, quæ a puncto Q ad AE duci possint. Summa igitur quadratorum ex GB, BF est omnium minima. Q. E. D.

XIX. Facile perspicitur, quolibet segmenta ex iisdem radiis BD, BC ad libitum capta, idem minimum in puncto

ſto B conficere nequaquam poſſe, niſi ita ſe habuerint ad invicem, ut ſinus angulorum GBN, FBM.

XX. Si *Bernoullianæ* hypothefi locus eſſet, atque in ipſo incidentiæ puncto æquilibrium concipi poſſet inter binas Vires inæquales mediorum reſiſtentiis, vel ſi mavis viribus refractivis proportionales, ſponte quodammodo ex hiſce noſtris Lex proſtueret reſractionis, ratione quidem, ea, ni fallor, faciliori, qua incomparabilis Vir (Aët. Erudit. Lipſ. An. 1701) ad id demonſtrandum uſus eſt.

Sit enim AE ſuperficies reſringens, CB radius incidens, BD reſractus, ut ante. Deſignent jam binæ K, P mediorum ABC, ABD diverſæ inter ſe naturæ reſiſtentias, atque in ratione K ad P abſcindantur BG, BF a radiis incidente, & reſracto. Ponatur nunc cum Bernoullio Vires duas BG, BF inter ſe mutuo æquilibrari in B, vel ipſas in punctum B ſecundum directiones BG, BF ſimul agere concipias trahendo, vel premendo ſecundum directiones GB, FB. Perinde igitur eſt ac ſi punctum incidentiæ B traheretur, vel premeretur in directione neceſſaria AE a binis viribus BG, BF. Juncta igitur GF, biſectaſque in Q, erit punctum Q commune gravitatis centrum binorum ponderum æqualium in F, G conſtitutorum. Ducatur ex puncto Q ad incidentiæ punctum B recta QB; & quoniam Vires GB, BF inter ſe mutuo æquilibrantur in B, ex hypothefi, erit QB omnium minima, quæ a puncto Q ad AE duci poſſint, ideoque ipſi AE normalis in B. Producta igitur hinc & inde QB, erunt GBN, FBM anguli incidentiæ, & reſractionis. Quare ducta FR parallela incidenti radio GB, in Triangulis FQR, GBQ propter angulos FQR, FRQ æquales angulis GQB, GBQ, latuſque GQ æquale lateri QF, ex conſtructione, erit FR æqualis ipſi GB. Verum in Triangulo RBF, ut BF ad FR, ita ſinus anguli BRF ad ſinum anguli RBF, hoc eſt ut ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli reſractionis; Ergo ita ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli reſractionis ut BF ad

BG,

BG, vel ut P ad K ex constructione. Sinus igitur angulorum incidentiæ, & refractionis se habent inter se invicem reciproce, ut mediorum resistentiæ, scilicet in constanti ratione. Q. E. D.

XXI. Pari modo, si e re foret, '*concessa causa finali Leibnitiana*, commodissime, brevique demonstratione ex præcedentibus eandem refractionis Legem derivare liceret. Verum hæc sufficiat indicasse.

F I N I S.



